**BAB 6**

**DETERMINAN**

Dalam Bab ini :

* Determinan Berorde 1, 2, dan 3
* Permutasi

# Determinan dengan Sebarang Orde

* Minor dan Kofaktor
* Penghitungan Determinan
* Aturan Cramer

Determinan Berorde 1, 2, dan 3

Tiap matriks bujursangkar-n A = [] ditetapkan memiliki scalar khusus yang disebut *determinan* dari A yang di notasikan dengan det(A) atau lAl atau

Kita perlu menekankan bahwa susunan scalar n x n yang di batasi oleh dua garis lurus, yang disebut *determinan berorde n*, bukan sebuah matriks melainkan menotasikan determinan yang dibatasi oleh susunan scalar – scalar, yaitu suatu matriks tertutup.

Fungsi determinasi pertama kali ditemukan pada waktu pengkajian system persamaan linear. Kita akan melihat bahwa determinasi merupakan metode yang sangat penting dalam mengkaji dan memperoleh determinan merupakan metode yang sangat penting dalam mengkaji dan memperoloeh sifat – saifat matriks bujursangkar

Definisi dterminasi tersebut dan sebagian besar sifatnya juga berlaku dalam kasus di mana entri – entri matriks berasal dari sebuah lingkaran komutatif.

Kita akan mulai dengan kasus khusus tentang determinan berorde 1, 2,dan 3.Kemudian kita akan mendefinisikan determinan dengan sebarang orde.Definisi umum ini akan diuraikan melalui pembahasan tentang permutasi yang diperlukan untuk mendefinisikan determinan secara umum.

Determinan berorde 1 dan 2 didefinisikan sebagai berikut :

= dan = -

Sehingga determinan dari matriks A= , 1 X 1, adalah scalar itu sendiri dalam hal ini, det(A) = itu sendiri ; dalam hal ini , det(A) = = . Determinan berrorde dua dapat diingat dengan enggunakan diagram berikut ini :

Dalam hal ini, determinannya adalah sama dengan hasil kali dari elemen – elemen yang berada di jalur arah plus ( diagonal “maju” ) dikurangi hasil kali dari elemen – elemen yang berada di jalur arah panah minus. (Terdapat diagram yang analog untuk determinan berorde 3 , tapi bukan untuk determinan yang berorde lebih tinggi .)

**Contoh 6.1.** Karena determinan berorde satu adalah skalar itu sendiri , maka kita akan memperoleh :

Det(27) = 27 , det (-7) = -7, det(t-3) = t – 3

= 5(6) – 3(4) = 30 – 12 = 18, = 21 + 10 = 31

Perhatikan dua persamaan linear dengan dua variabel tidak diketahui berikut:

+ =

+ =

Misalkan D = - adlah determinan dari matriks yang elemennya adalah koefisien – koefisien persamaan di atas . Maka sistemnya mempunyai sebuah solusi unik jika dan hanya jika D 0. Dalam kasus seperti ini , solusi unik tersebut dapat dinyatakan sepenuhnya dengan menggunakan determinan – determinan sebagai berikut:

X = = =

’

X = = =

Di sini D muncul sebagai penyebut pada kedua persamaan di atas. Pembilang dan masing – masing pada hasilbagiuntuk x dan hasilbagi untuk y dapat diperoleh dengan mesubtitusikan kolom konstanta ke dalam kolom koefisien dari variabel tidak diketahui di dalam matriks koefisien. Di sisi lain, jika D dari variabel tidak diketahui di dalam matriks koefisien. DI sisi lain , jika D = 0 , maka sistem ini tidak mempunyai solusi atau mempunyai lebih dari satu solusi.

**Contoh 6.2.**  Selesaikan dengan menggunakan determinasi dari sistem

4x – 3y = 15

2x + 5y = 1

Pertama – tama tentukan determinasi D dari matriks koefisiennya :

D = = 4(5) – (-3)(2) = 20 + 6 26

Karena D 0, maka sistem ini mempunyai sebuah solusi unik. Untuk memperoleh pembilang dan pada matriks koefisien tersebut, cukup dengan mengganti koefisien dari x dan y masing – masing dengan konstanta,kemudian mengambil determinannnya.

= = 75 + 3 = 78, = = 4 - 30 = -26

Maka solusi unik dari sistem tersebut adalah

X = = = 3 y = = = 1  
 Perhatikan sebarang matriks A = [], 3 x 3. Determinan dari A didefinisiakn sebagai berikut :

( + + )

Det(A)= = -( + +

Amati bahwa terdapat enamhasilkali, tiap hasil kali terdiri dari tiga elemen matriks asalnya. Tiga dari hasilkali ini dijumlahkan dan tiga dari hasilkali lainnya di kurangkan.

Diagram pada gambar 6-1 dapat membantuuntuk mengingat keenam hasilkali di atas di dalam det(A). dalam hal ini, determinasinya sama dengan jumlah hasilkali – hasil kali dari elemen – elemen yang berada pada ketiga jalur arah panah plus pada gambar 6-1 ditambah jumlah nilai nilai negative dari hasilkali – hasilkali elemen yang berada pada ketiga jalur arah panah minus. Kita perlu menekankan bahwa tidak terdapat metode diagram yang dapat digunakan untuk mengingat determinan yang berorde lebih tinggi.

GAMBAR 6.1

Contoh 6.3. misalkan A = dan B = . Tentukan det (A) dan det(B).

Det(A) = 2(5)(4) + 1(-2)(1) + 1(0)(-3) - 1(5)(1) – 1(5)(1) – (-2)(-3)(2) – 1(0)(4)

= 40 – 2 + 0 – 5 – 12 – 0 = 21

Det(B) = 3(5)(4) + 2 (-1)(2) + 1(-4)(-3) – 1(5)(2) – 3(-1)(-3) – 2(-4)(4)

= 60 – 4 + 12 – 10 – 9 + 32 = 81

Determinan dari matriks A = , 3 x 3, dapat di tulis ulang sebagai berikut :

A = - +

= ( - ) - ( - ) + ( - )

Yang merupakan kombinasi linear dari tiga determinan berorde 2 yang koefisien – koefisiennya (dengan tanda yang berubah – ubah) membentuk baris pertama dari matriks yang diketahui. Kombinasi linear ini dapat dinyatakan dalam bentuk

- +

Perhatikan bahwa tiap matriks 2 x 2 dapat di peroleh dengan menghapus baris dan kolom yang berisi koefisiennya pada matriks asal.

Contoh 6.4

= 1 -2+ 3

= 1 - 2 + 3

= 1(2 – 15) – 2(-4 – 0) + 3(20 – 0) = 13 + 8 + 60 = 55

**Permuntasi**

Pemutasi dari himpunan (1, 2, …, n) adalah pemetaan satu-ke-satu dari suatu himpunan ke himpunan itu sendiri atau, secara ekuivalen, penyusun ulang bilangan 1,2, .., n. Permuntasi seperti ini dinotasikan dengan

= atau di mana j =

Himpunan seluruh permutasi seperti ini dinotasikan dengan , dan banyaknya permutasi seoerti ini dinotasikan dengan n!. Jika maka pemetaan komposisi

Demikian pula, pemetaan identitas . (Dalam kenyataannya, )

**Contoh 6.5.**

1. Terdapat 2!= 2 . 1 permutasIA pada ; yaitu 12 dan 21 .
2. Terdapat 3!= 3 . 2 . 1 = 6 permutasi pada ; yaitu 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Perhatikan sebarang permutasi pada , katakanlah … . Kita mengatakan sebagai permutasi genap atau permutasi ganjil berdasarkan pada apakah jumlah inverse (pembalikan) pada merupakan bilangan genap atau bilangan ganjil. Inversi pada mempunyai arti sepasangbilangan bulat (*i*, *k*) sedemikian rupa sehingga *i* > *k*, tetapi nilai *i* melampaui nilai *k* pada .

Kemudian kita mendefinisikan tanda atau paritas dari (ditulis sgn ) dengan

Sgn =

**Contoh 6.6.**

1. Tentukan tanda dari 35142 pada

Untuk tiap elemen  *k,* kita menghitung banyaknya elemen  *i*  sedemikian rupa sehingga  *i* > *k* dan  *i* melampaui  *k* pada . Dalam hal ini terdapat :

2 bilangan (3 dan 5) yang lebih besar dan melampaui 1,

3 bilangan (3, 5 dan 4) yang lebih besar dan ,elampaui 2,

1 bilangan (5) yang lebih besar dan melampaui 4.

(Tidak terdapat bilangan yang lebih besar dab melampaui 3 atau 5.)

Karena secara keseluruhan terdapat enam inverse, maka adalah bilangan genap dan sgn = 1.

Misalkan adalah permutasian yang mempertukarkan dua bilangan  *i* dan *j* , dan membiarkan bilangan lainnya tetap. Dalam hal ini,

Kita menyebut dengan transposisi. Jika *i* < *j* , maka terdapat 2(*j – i) + 1* inversi pada *,* sehingga transposisi adalah ganjil.

**Determinan dengan Sebarang Orde**

Misalkan A = [] adalah matriks bujursangkar berorde *n*  pada medan K.

Perhatikan hasilkali dari *n* elemen matriks A sedemikian rupa sehingga satu dan hanya satu elemen berasal dari tiap baris, serta satu dan hanya satu elemen berasal dari tiap kolom. Hasilkali seprti ini dapat ditulis dalam bentuk

, , …,

Yaitu, ketika factor-faktor tersebut berasal dari baris-baris yang berurutan, dan dengan demikian subskrip-subskrip pertama berorde alami 1, 2, …, n. Selanjutnya, karena factor-faktor tersebut berasal dari kolom-kolom yang berbeda, maka deretan subskrip kedua akan membentuk permutasi pada . Sebaliknya, tiap permutasi pada akan menentukan hasilkali dari bentuk diatas. Dengan demikian, matriks A mempunyai *n!*  hasilkali seperti ini.

Determinan dari A = [], yang dinotasikan dengan det(A) atau , adalah jumlah dari seluruh *n!* hasilkali di atas, dimana tiap hasilkali seperti ini dikalikan dengan sgn Dalam hal ini,

|A | = (sgn )

atau

|A| = ∑ (sgn

Determinan dari matriks bujursangkar-*n* A dikatakan berorde n.

Contoh berikut ini menunjukan bahwa definisi di atas sesuai ndengan definisi determinan berorde 1, 2, dan 3 yang telah diuraikan sebelumnya.

**Contoh 6.7.**

1. Misalkan A =[ ] adalah matriks 1 x 1 . Karena hanya mempunyai satu permutasi, yang berarti genap, maka det(A) = , yaitu bilangan itu sendiri .
2. Misalkan A = [ ] adalah matriks 2 x 2 . Di dalam , permutasi 12

Adalah genap dan permutasi 21 adalah ganjil. Sehingga ,

det (*A*) = =

(c) Misalkan A = [] adalah matriks 3 x 3. Di dalam , permutasi 123, 231 , 312 adalah genap dan permutasi 132, 213, 321 adalah ganjil sehingga,

det (*A*) =

= + + - - -

Ketika *n* meningkat, jumlah suku di dalam determinan menjadi sangat banyak . Oleh karena itu, kita menggunakan metode tak langsung untuk menghitung determinan, dan tidak lagi menggunakan definisi dari determinan. Pada kenyataannya, kita dapat membuktikan sejumlah sifat determinan yang memungkinkan kita untuk menyederhanakan penghitungan.secara khusus , kita dapat menunjukan bahwa determinan berorde *n* sama dengan kombinasi linear dari determinan – determinan berorde *n* – 1, seperti dalam kasus *n* = 3 di atas .

Sekarang kita akan menguraikan sifat – sifat dasar determinan .

**Teorema 6.1:** Determinan dari matriks *A* dan transpos - nya adalah sama. yaitu, = .

Berdasarkan teorema ini, teorema manapun mengenai determinan dari matriks *A* yang berkenaan dengan baris–baris dari A akan mempunyai teorema analog yang berkenaan dengan kolom–kolom dari *A.* Teorema berkut akan menguraikan kasus-kasus tertentu di mana determinannya dapat di peroleh dengan cepat.

**Teorema 6.2:** Misalkan *A* adalah matriks bujur sangkar.

1. Jika *A* mempunyai baris (kolom) yang terdiri dari elemen – elemen nol, maka = 0.
2. Jika *A* mempunyai dua baris (kolom) yang identik, maka = 0.
3. Jika *A* mempunyai matriks segitiga, yaitu *A* mempunyai elemen nol di atas

Atas atau bawah diagonalnya, maka = hasil kali elemen-elemen diagonalnya. Sehingga, secara khusus = 1, di mana *I* adalah matriks identitas.

Teorama berikut menunjukan bagaimana determinan suatu matriks dapat di pengaruhi olehoperasi baris elementer dan operasi kolom elementer.

**Teorema 6.3:** Anggaplah *B* di peroleh dari *A* melalui operasi baris (kolom) elementer.

1. Jika dua baris (kolom) dari *A* saling di pertukarkan, maka = -.
2. Jika sebuah baris (kolom) dari *A* dikalikan dengan sebuah scalar *k,* maka = .
3. Jika kelipatan dari sebuah baris (kolom) dari *A* di jumlahkan dengan baris (kolom) lainnya dari *A,* maka

Berikut ini kita akan mempelajari dua dari teorema-teorema tentang determinan yang paling penting dan berguna.

**Teorema 6.4:** Determinan dari hasilkali dua matriks *A* dan *B* adalah hasilkali dari determinan-determinannya, yaitu det(*AB)* = det(*A)* det(*B)*.

**Teorema 6.5:** Misalkan *A* adalah matriks bujursangkar. Maka pernyataan-pernyataanya berikut ini adalah ekuivalen:

1. *A* dapat dibalik, dalam hal ini *A* mempunyai invers .
2. *AX =* 0 hanya mempunyai solusi nol.
3. Determinan dari *A* bukan nol, yaitu det (*A*) ≠ 0.

sebagai matriks *A* yang dapat dibalik, atau matriks *A* di mana ≠ 0, atau matriks *A* dimana *AX* = 0 hanya mempunyai solusi nol. Teorema di atas menunjukan bahwa semua definisi ini adalah ekuivalen.

Matriks *A* dan matriks *B* adalah *serupa ,* jika terdapat matriks nonsingular *P* demikian rupa sehingga *B* = *AP*. Dengan menggunakan sifat perkalian dari determinan (Teorema 6.4), kita dapat membuktikan teorema berikut dengan mudah.

**Teorema 6.6:** Anggaplah *A* dan *B* adalah matriks-matriks yang serupa. Maka

Minor dan kofaktor

Perhatikan matriks bujur sangkar-n A = []. Misalkan menotasikan Submatriks bujur sangkar-(n – 1) dari A yang diperoleh dengan menghapus baris ke-I dan kolom ke-j. determinan [] di sebut minor dari elemen matriks A, dan kita mendefinisikan *kofaktor* dari yang di notasikan dengan , sebagai minor “bertanda” :

= (-1││

Perhatikan bahwa “tanda” (-1 yang menyertai minor membentuk pola seperti papan catur dengan tanda “+” pada diagonal utamanya:

Perlu di tekankan bahwa menontasikan sebuah matriks, sementara menotasikan sebuah scalar.

**Contoh 6.8** misalkan A **= . T**entukan minor dan kofaktor dari :

1. dan (b) ││dan .
2. ││= = = 8-14= -6

Sehingga = (-1 ││= - (-6) = 6

1. ││== 12-15=-3

Sehingga =(-1= +(-3)= -3

**Minor dan minor utama**

Misalkan A= adalah matriks bujursangkar barcode *n.* perhatikan sebarang r baris dan r kolom dari *A*. dalam hal ini, perhatikan sebarang himpunan *I* = () dari *r* indeks baris dan sebarang himpunan *J = (* dari *r* indeks kolom. Maka *I* dan *J*  mendenefisikan submatriks r x r dari *A* yang dinotasikan dengan A(*I;J*), yang dapat di peroleh dengan menghapus baris dan kolom dari *A* yang sukripsinya masing-masing bukan merupakan bagian *I* dan *j*. dalam hal ini, A*(I:J)*= [ : s Є I, t Є J]

Determinan [A(I:J)] di sebut *minor* dari *A* yang barcode *r* dan

(-1) + +…+

Adalah bertanda yang bersesuaian. (perhatikan bahwa sebuah minor yang barcode n – 1 adalah minor dari elemen dan minor bertanda yang bersesuaian adalah sebuah kofaktor.) Di samping itu jika, jika I’ dan J’ masing-masing menotasikan indeks baris dan indeks kolom sisanya, maka [A(I’;J’] *menotasikan minor pelengkap* dan tandanya sama dengan tanda minor itu sendiri.

**Contoh 6.9** misalkan A= [ adalah matriks bujursangkar-5, dan misalkan I ={1,2,4} dan J {2,3,5}. Maka I’ = {3,5} dan J’ {1,4}, dan minor yang bersesuaian [M] dan minor pelengkap [M’] adalah sebagai berikut ;

[M] = [A(I;J)]= dan [M’]=[A(I’:J’)=

Karena 1+2+4+2+3+5=17 adalah ganjil, -1 [M] adalah minor bertanda, dan –[ M’] adalah minor pelengkap bertanda.

Sebuah minor di katakana utama jika indeks baris dan indeks kolomnya sama , atau secara ekuvelen, jika elemen elemen diagonal dari minornya berasal dari diagonal matriks. Perlu di perhatikan bahwa tanda dari minor utma selalu +1 karena jumlah dari subkrip baris dan subkrip kolom yang identik harus selalu genap.

Contoh 6.10 misalkan A = tentukan jumlah C

Dari minor-minor utama matriks *A* yang masing-masing berorde satu, dua, dan tiga.

1. Terdapat tiga minor utama berorde satu, yaitu [1] = 1< [5] = 5, [-2] = -2, sehingga = 1 + 5 – 2 = 4(perhatikan bahwa adalah trace dari *A*, yaitu = tr(A)
2. Terdapat tiga cara untuk memilih dua dari tiga elemen diagonal, dan tiap pilihan menghasilkan minor berorde dua yaitu:

(Perhatikan bahwa minor-minor berorde dua ini masing-masing adalah kofaktor dan dari *A*). sehingga = -1 -5 -14 = -20.

C hanya terdapat satu cara untuk memilih dari tiga elemen diagonal. Sehingga hanya

Minor yang berorde tigalah yang merupakan determinan dari *A* itu sendiri. Sehingga

= -10 -24 -3 -15 + 12 – 4 = -44

**Teorema 6.7: (laplace)** Determinan dari matriks bujursangkar *A* = [] sama dengan jumlah hasil kali-kali yang diperoleh dengan cara mengalikan elemen-elemen dari sebarang baris (kolom) dengan masing-masing kofaktornya:

[A] = + + … + = *a*

[A] =

Rumus-rumus untuk[A] di atas disebut *exspansi (perluasan) laplace* dari determinan matriks *A* berdasarkan baris ke-*I* dan kolom ke-*j*. Bersama dengan opersi baris(kolom) elementer, rumus-rumus ini menawarkan sebuah metode untuk menyerdehanakan penghitungan [A], sebagaimana diuraikan berikut ini.

Penghitungan determinan

Algoritma berikut ini menyerdehanakan penghitungan determinan berorde *n* menjadi penghitungan determinan berorde *n* – 1.

**Algoritma 6.1:** (**penurunan orde sebuah determinan)** Inputnya adala matriks bujursangkar-*n­* taknol A = [] dengan *n* >1.

**Tahap 1.** Pilihlahn elemen = 1 atau, jika tidak ada,

**Tahap 2.** Dengan menggunakan sebagai pivot, terapkan operasi-operasi baris (kolom) elementer untuk menempatkan 0 di seluruh posisi lainya pada kolom (baris) yang mengandung

**Tahap 3.**  Exspansialah determinanya dengan menggunakan kolom (baris) yang mengandung

Algoritma 6.1 biasanya digunakan untuk determinan berorde 4 atau lebih. Untuk determinan berorde kurang dari , kita dapat menggunakan rumus spesifik untuk determinan.

Eleminasi Gauss atau, secara ekuivalen, penggunaan ulang algoritma 6.1 bersama dengan pertukaran baris dapt digunakan untuk mentransformasi matriks *A* menjadi matriks segitiga atas, yang determinanya merupakan hasil kali dari entri-entri diagonalnya. Meskipun demikian, kita harus menjaga jumlah pertukaran baris, karena setiap pertukakaran baris akan mengubah tanda determinanya.

**Contoh 6.11** Gunakan algoritma 6.1 untuk menentukan determinan dari

A=Gunakan = 1 sebagai pivot untuk menempatkan elemen 0m pada posisi lainya dari kolom ketiga, yaitu dengan menerapkan operasi baris “mengganti dengan ”, “mengganti dengan ”, dan “mengganti dengan ”. Berdasrkan teorema 6.3 (iii), operasi-operasi ini tidak akan mengubah nilai determinan tersebut. Sehingga

= =

Selanjutnya, ekspansilah dengan menggunakan kolom ketiga. Secara spesifik, abaikan seluruh suku yang mengandung 0 dan gunakan fakta bahwa tanda minor adalah (-1) = -1. Sehingga

= =-=-(4-18+5-30+4-3)= 38

**Teorema 6.8**: Anggaplah M adalah matriks blok segitiga atas (bawah) engan blok-blok diagonal , , …, . Maka

Det(*M*) = det() det() … det().

**Contoh 6.12.** Tentukan di mana  *M* = .

Perhatikan bahwa *M* adalah matriks blok segitiga atas. Hitunglah determinan dari tiap blok diagonal:

= 10 + 3 = 13, = -12 + 20 + 30 + 25 – 18 – 16 = 29

Maka = 13(29) = 377

**CATAT !**

Anggaplah *M* = , dimana A, B, C, D adalah matriks-matriks bujursangkar. Maka = - *tidaklah* selalu benar.

Aturan Cramer

Perhatikan sistem *AX* = *B*  yang terdiri dari *n* persamaan linear dengan *n* variable tidak diketahui. Di sini *A* =[] adalah matriks koefisien (bujursangkar) dan *B* = [] adalah vector kolom yang berisi konstanta-konstanta. Misalkan adalah matriks yang diperoleh dari *A* dengan mengganti kolom ke-*i* dari *A* dengan vektor kolom *B*. Lebih jauh lagi, misalkan

*D* = det(*A*), = det(), = det(), …, = det()

Hubungan yang mendasar antara determinan dan solusi dari sistem *AX* = *B*  adalah sebagai berikut.

**Teorema 6.9**: Sistem (bujursangkar) *AX* = *B* mempunyai solusi jika dan hanya jika *D* ≠ 0. Dalam kasus ini, solusi uniknya dinyatakan dengan

= , = , … =

Teorema diatas dikenal dengan *aturan Cramer* yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Perlu ditekankan bahwa teorema ini hanya berlaku untuk sistem dengan jumlah persamaan yang sama dengan jumlah variable tidak diketahui, bahwa persamaan ini menghasilkan solusi hanya ketika *D* ≠ 0. Dalam kenyataannya, jika *D* = 0, teorema ini tidak menjelaskan apakah sistem tersebut mempunyai solusi atau tidak. Meskipun demikian, dalam kasus sistem homogen, kita memperoleh teorema yang berguna berikut ini

**Teorema 6.10**: Sistem homogeny bujursangkar *AX* = 0 mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika *D* = = 0.

Contoh 6.13. Selesaikan dengan menggunakan determinan, system

Pertama-tama hitunglah determinan D dari matriks koefesien :

D

Karena D , maka sistem ini mempunyai solusi unik. Untuk menghitung , , , kita mengganti koefesien di dalm matriks koefesien masing-masing dengan konstanta .Hasilnya adalah.

Sehingga solusi unik dari sistem tersebut adalah yaitu, vector .